

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 080

1. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy az $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Határozd meg a f függvény grafikus képéhez a $+\infty$ -be húzott ferde aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $f(e^x + 1) \geq 4$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén.

2. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén tekintsük az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{e^x}{e^{nx} + 1}$ függvényeket.

5p a) Számítsd ki $\int f_0(x) dx$, ha $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f_1 függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.