

III. FELADAT (30p) V: 081

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, bármely $x > 0$ esetén.

5p b) Írd fel az f függvény grafikus képehez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq -1$, bármely $x > 0$ esetén.

2. Tekintsük az $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1$ függvényt, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ függvény az f_a függvénynek egy primitív függvénye legyen.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$ értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\int_0^1 f_a^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$.