

III. FELADAT (30p) V: 084

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képehez a $+\infty$ -be húzott vízszintes aszimptota egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq \frac{1}{e}$ bármely $x \leq 2$.

2. Tekintsük az $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+2}$ függvényt.

5p a) Számítsd ki $\int f^2(x) dx$, ahol $x \in [0,1]$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Felhasználva esetleg, hogy $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$ bármely $x \in [0,1]$ esetén, igazold, hogy

$$\int_0^1 x^{2008} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2009}.$$