

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p) V: 086**

1. Tekintsük az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , bármely  $x > 0$  esetén.

5p b) Írd fel az  $f$  függvény grafikus képéhez az  $x_0 = e$  abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenletét.

5p c) Igazold, hogy  $\ln x \leq \frac{x}{e}$ , bármely  $x > 0$  esetén.

2. Tekintsük az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$  függvényt.

5p a) Határozd meg  $\int f(x) dx$ , ahol  $x \in [0, 1]$ .

5p b) Számítsd ki az  $f$  függvény grafikonja által meghatározott forgástest térfogatát.

5p c) Felhasználva esetleg, hogy  $\sqrt{x} \geq x$ , bármely  $x \in [0, 1]$  esetén, igazold hogy

$$\int_0^1 f^{2008}(x) dx \leq \frac{1}{2009}.$$