

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p) V: 087

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = \ln x$, bármely $x > 0$.

5p b) Írd fel az f függvény grafikus képéhez az $x_0 = 1$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenletét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy az f függvény konvex $(0, +\infty)$ -en.

2. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén tekintsük az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1$ függvényeket.

5p a) Számítsd ki $\int_0^1 f_1(x) dx$, ahol $x \in [0, 1]$.

5p b) Határozd meg a $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f_1(x)}$ függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)} dx \leq \sqrt{2}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.