

III. FELADAT (30p) V: 088

1. Tekintsük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 1$ függvényt.

5p a) Számítsd ki $f'(1)$.

5p b) Határozd meg az f függvény konvexitási és konkavitási intervallumait.

5p c) Igazold, hogy $f(x) \leq 3$, bármely $x \leq 2$ esetén.

2. Tekintsük az $f, F: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ és $F(x) = x + \frac{1}{x}$ függvényeket.

5p a) Ellenőrizd, hogy az F függvény egy primitív függvénye-e az f függvénynek.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Számítsd ki az $\int_1^e f(x) \cdot \ln x \, dx$ értékét.