

III. FELADAT (30p) V: 093

1. Tekintsük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

5p b) Írd fel az f függvény grafikus képehez az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenletét.

5p c) Igazold, hogy $x \cdot f(x) \geq 0$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.

2. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén tekintsük az $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$ függvényeket.

5p a) Határozd meg $\int (x + \sqrt{x}) dx$, $x > 0$.

5p b) Számítsd ki az Ox tengely körül megforgatott f_1 függvény grafikonja által meghatározott forgástest térfogatát.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{2008}(x) dx \leq \frac{1}{2009}$.