

III. FELADAT (30p)

1. Tekintsük az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ függvényt.

5p a) Ellenőrizd, hogy $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, bármely $x > 0$ esetén.

5p b) Határozd meg az f függvény ferde aszimptotáját $+\infty$ -be.

5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon.

2. Tekintsük az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$ függvényeket, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Határozd meg az $\int f_0(x) \cdot e^{-x} dx$, ahol $x \in [0, 1]$.

5p b) Határozd meg az f_1 függvény grafikonja, az Ox tengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{2007}(x) dx + \int_0^1 f_{2009}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2008}(x) dx$.