II. FELADAT (30p)

1. Adott a következő mátrix: $A=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Számítsd ki A^2+A, ahol $A^2=A\cdot A$.

5p **b)** Tudva, hogy $A^n=\begin{pmatrix}5^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ és $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{n\text{ szer}}$, oldd meg a $\det\left(A^n\right)=2\cdot 5^n-125$ egyenletet.

5p **c)** Határozd meg a $B=A+A^2+\cdots+A^{2008}$ mátrixot.

2. Adott az $f=X^4+mX^2+n$ polinom, amelynek gyökei x_1, x_2, x_3, x_4 és $m,n\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Határozd meg $m,n\in\mathbb{R}$ értékét tudva, hogy $x_1=0$ és $x_2=1$ gyökei a polinomnak.

5p **b)** Határozd meg az $m\in\mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a polinom gyökeire teljesüljön az $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=2$ összefüggés.

5p **c)** Ha $m=1$ és $n=1$ bontsd fel az f polinomot irreducíbilis tényezők szorzatára az $\mathbb{R}[X]$ halmazon.