

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

II. FELADAT (30p)

1. Adott a következő mátrix: $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5p a) Számítsd ki $A^2 + A$, ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Tudva, hogy $A^n = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ és $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ szer}}$, oldd meg a $\det(A^n) = 2 \cdot 5^n - 125$ egyenletet.

5p c) Határozd meg a $B = A + A^2 + \dots + A^{2008}$ mátrixot.

2. Adott az $f = X^4 + mX^2 + n$ polinom, amelynek gyökei x_1, x_2, x_3, x_4 és $m, n \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg $m, n \in \mathbb{R}$ értékét tudva, hogy $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$ gyökei a polinomnak.

5p b) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy a polinom gyökeire teljesüljön az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2$ összefüggés.

5p c) Ha $m = 1$ és $n = 1$ bontsd fel az f polinomot irreducibilis tényezők szorzatára az $\mathbb{R}[X]$ halmazon.