

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazból.

5p a) Igazold, hogy $AB = BA$.

5p b) Számítsd ki $A^2 + B^2$, ahol $A^2 = A \cdot A$ és $B^2 = B \cdot B$.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $C^4 = 5^4 \cdot I_2$, ahol $C = A + B$ és $C^4 = C \cdot C \cdot C \cdot C$.

2. Adottak az $f = X^4 + aX^3 + bX^2 - 5X + 6$ és $g = X^3 + X - 2$ racionális együtthatójú polinomok.

5p a) Határozd meg $a, b \in \mathbb{Q}$ értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen a g polinommal.

5p b) Ha $a = -3$ és $b = 1$, bontsd fel az f polinomot irreducibilis tényezők szorzatára a $\mathbb{Q}[X]$ halmazon.

5p c) Oldd meg a valós számok halmazán a $3^{3x} - 3^{2x+1} + 3^x - 5 + 6 \cdot 3^{-x} = 0$ egyenletet.