

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok, valamint az

$f: \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ,  $f(X) = X^2 - 3X + I_3$  függvény, ahol  $X^2 = X \cdot X$ .

**5p** a) Számítsd ki  $\det(I_3 + B)$ .

**5p** b) Bizonyítsd be, hogy  $f(A) = I_3 + B$ .

**5p** c) Igazold, hogy  $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$ , ahol  $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$ .

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az  $x * y = x + y - 3$  és  $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$  műveleteket.

**5p** a) Oldd meg az egész számok halmazán az  $x \circ x = x * x$  egyenletet.

**5p** b) Határozd meg az  $a$  egész számot úgy, hogy  $x \circ a = 3$ , bármely  $x$  egész szám esetén.

**5p** c) Oldd meg az  $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$  egyenletrendszert, ahol  $x, y \in \mathbb{Z}$ .