

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$.

5p a) Számítsd ki A^2 , ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Ellenőrizd, hogy $A^2 = aI_2 + bA$, ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p c) Ha $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ és $AX = XA$, mutasd ki, hogy létezik $m, n \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $X = mI_2 + nA$.

2. Adott az $f = X^4 + aX^3 - X - 1$ polinom, ahol $a \in \mathbb{Z}$.

5p a) Határozd meg a értékét tudva, hogy $x=1$ gyöke az f polinomnak.

5p b) Ha $a=1$ határozd meg az f polinom valós gyökeit.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $f(x) \neq 0$, bármely $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.