

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz.

5p a) Ha $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ számítsd ki AB .

5p b) Igazold, hogy ha $A, B \in M$, akkor $AB \in M$.

5p c) Mutasd ki, hogy ha $X \in M$ és $AX = XA$ bármely $A \in M$, akkor létezik $p \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Adott az $f = (X^2 - 2X + 1)^2 - a^2$ polinom, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Ha $a = 0$ oldd meg az $f(x) = 0$ egyenletet.

5p b) Igazold, hogy $f = (X^2 - 2X + 1 + a)(X^2 - 2X + 1 - a)$.

5p c) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ azon értékeit, ameyekre az f polinom minden gyöke valós.