

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 15 \\ 3x + (a + 4)y + 5z = 22 \\ 3x + 2y + (3 - a)z = 16 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Ha $a = 1$ számítsd ki a rendszer mátrixának a determinánsát.

5p b) Igazold, hogy a $(7, 1, 1)$ számhármass nem lehet megoldása a rendszernek, bármely $a \in \mathbb{R}$.

5p c) Határozd meg az egyenletrendszer azon (x_0, y_0, z_0) megoldását, amelyre $y_0 + z_0 = 3$.

2. A \mathbb{Z} halmazon értelmezzük az $x \perp y = x + y + 1$, $x \circ y = ax + by - 1$ műveleteket, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$, valamint az $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényt, ahol $f(x) = x + 2$.

5p a) Bizonyítsd be, hogy $x \perp (-1) = (-1) \perp x = x$, bármely $x \in \mathbb{Z}$.

5p b) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{Z}$ számokat úgy, hogy a „ \circ ” művelet asszociatív legyen.

5p c) Ha $a = b = 1$ bizonyítsd be, hogy a (\mathbb{Z}, \perp) és (\mathbb{Z}, \circ) csoportok esetén az f csoportmorfizmus.