

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = a \end{cases}$$
 egyenletrendszer, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Számítsd ki az egyenletrendszer mátrixának determinánsát.

5p b) Ha $a = 0$ oldd meg az egyenletrendszert.

5p c) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékeit úgy, hogy az egyenletrendszer megoldása teljesítse az $x = y + z$ összefüggést.

2. Az $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ halmazban adottak az $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ és az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, valamint a

$G = \{X^n \mid n \in \{1, 2, 3\}\}$ részhalmaz, ahol $X^n = \underbrace{X \cdot X \cdot \dots \cdot X}_{n\text{-szer}}, n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $X^3 = I_3$.

5p b) Számítsd ki $\det(I_3 + X + X^2)$.

5p c) Igazold, hogy ha $Y \in G$, akkor $Y^{-1} \in G$.