II. FELADAT (30p)

1. Adott az $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a,b.c.d \in \mathbb{R}\right\}$ halmaz és az $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p **a)** Igazold, hogy $O_3 \in M$.

5p **b)** Mutasd ki, hogy az M halmaz két tetszőleges mátrixának a szorzata benne van az M halmazban.

5p **c)** Ha $A \in M$ és $\det(A)=0$, akkor bizonyítsd be, hogy $A^3=O_3$, ahol $A^3=A\cdot A\cdot A$.

2. Adott az $f=X^4-X^3+aX^2+bX+c$ polinom, ahol $a,b,c \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Ha $a=c=1$ és $b=-1$ határozd meg az f polinomnak az X^2+1 polinommal való osztási maradékát és hányadosát.

5p **b)** Határozd meg az a, b, c számokat tudva, hogy az f polinomnak az X^2+1-gyel való osztási maradéka X , valamint az f polinomnak $X-1$-gyel való osztási maradéka -1.

5p **c)** Igazold, hogy ha $a \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, akkor az f polinomnak nem minden gyöke valós.