

II. FELADAT (30p)

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot. Jelöljük $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n\text{-szer}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $A^2 = 3A$.

5p b) Számítsd ki $\det(A^{10})$.

5p c) Számítsd ki a $B = A + I_2$ mátrix inverzét, ha $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Adott a $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ halmaz és a $x \circ y = x^{3 \ln y}$, $\forall x, y \in G$ művelet.

5p a) Határozd meg az $x \circ e = 1$ egyenlet valós megoldásainak halmazát, ahol e a természetes logaritmus alapja.

5p b) Igazold, hogy $x \circ y \in G$, $\forall x, y \in G$.

5p c) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet asszociatív a G halmazon.