

II. FELADAT (30p)

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ négyzetes mátrixok halmazában adott az $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ mátrix.

Jelöljük $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n\text{-szer}}, n \in \mathbb{N}^*$

5p a) Igazold, hogy $A + A^2 = 2A$.

5p b) Határozd meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ mátrixokat úgy, hogy $\det(X + A) = 2$.

5p c) Igazold, hogy $A + 2A^2 + \dots + nA^n = \frac{n(n+1)}{2}A, \forall n \in \mathbb{N}^*,$ ha $A^n = A, \forall n \in \mathbb{N}^*.$

2. Adott az $f = X^3 + X^2 + mX + 1, m \in \mathbb{R}$ polinom, amelynek gyökei $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

Jelöljük $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n, n \in \mathbb{N}^*.$

5p a) Számítsd ki azt az m valós számot, amelyre $x_1 = 2$.

5p b) Igazold, hogy $S_3 + S_2 + mS_1 + 3 = 0$.

5p c) Igazold, hogy bármely $m \in \mathbb{Z}$ páros számra, az f polinomnak nincs racionális gyöke.