

II. FELADAT (30p)

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ négyzetes mátrixok halmazában adottak $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$,

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p a) Számítsd ki $\det(A^2)$, ha $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Határozd meg $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ értékeket, ha $A \cdot B = I_2$.

5p c) Számítsd ki $S = (B^{-1} - A)^2$, ha $A \cdot B = I_2$.

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 3$ és az $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$ műveleteket.

5p a) Oldd meg \mathbb{Z} - ben az $x \circ x = 12$ egyenletet.

5p b) Igazold, hogy $1 \circ (2 * 3) = (1 \circ 2) * (1 \circ 3)$.

5p c) A $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ halmazon oldd meg az $\begin{cases} (x-3) * y = 2 \\ (x-y) \circ 4 = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert.