

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $\begin{cases} ax+2y=0 \\ 4x+y=0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ egyenletrendszer, és $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ az egyenletrendszer mátrixa. Jelöljük $A^2 = A \cdot A$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Oldd meg az egyenletrendszert, ha $a = -1$.

5p b) Igazold, hogy $A^2 - (a+1)A + (a-8)I_2 = O_2$.

5p c) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét, ha az A mátrix teljesíti az $A^2 = 9I_2$ összefüggést.

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = x + y + 11$ műveletet.

5p a) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet asszociatív.

5p b) Oldd meg az $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{6\text{-szor } x} = 1$ egyenletet.

5p c) Igazold, hogy (\mathbb{Z}, \circ) kommutatív csoport.