

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ mátrix.

5p a) Számítsd ki az A^2 mátrixot, ahol $A^2 = A \cdot A$, $a = 1$ esetben.

5p b) Számítsd ki $\det(A^2)$, $a \in \mathbb{R}$.

5p c) Igazold, hogy $A^2 \neq I_3$, bármely $a \in \mathbb{R}$.

2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ és $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$ műveleteket.

5p a) Ellenőrizd, hogy $(x * 2) - (3 \circ x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Számítsd ki $e_1 * e_2 + e_1 \circ e_2$, ha e_1 a „*” művelet semleges eleme, valamint e_2 a „ \circ ” művelet semleges eleme.

5p c) Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1$ függvény. Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$