

II. FELADAT (30p)

1. Adott a $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ determináns.

5p a) Számítsd ki a Δ determináns értékét, ha $a = -1$, $b = 0$ és $c = 1$.

5p b) Igazold, hogy $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p c) Oldd meg a $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$, $x \in \mathbb{R}$ egyenletet.

2. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ halmazban adottat a $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5) \mid \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \\ \hat{2}\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix} \right\}$ részhalmaz és az $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ és $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Igazold, hogy $I_2 \in G$ és $O_2 \in G$.

5p b) Igazold, hogy ha $A, B \in G$, akkor $A + B \in G$.

5p c) Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok összeadására nézve kommutatív csoportot képez.