

II. FELADAT (30p)

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Számítsd ki $\det(A^2)$, ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p b) Igazold, hogy ha $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és $XA = AX$, akkor létezik $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

5p c) Igazold, hogy ha $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, akkor az $Z Y^2 = A$ egyenletnek nincs megoldása az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban.

2. Adott a $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ gyűrű.

5p a) Számítsd ki az invertálható elemek számát a $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ gyűrűben értelmezett szorzási műveletre nézve.

5p b) Legyen S a $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5}$ egyenlet megoldásainak összege, és P az $x^2 = x$, $x \in \mathbb{Z}_6$ egyenlet megoldásainak szorzata. Számítsd ki az $S + P$ értékét.

5p c) Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy a $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ gyűrű valamely eleme megoldása legyen az $x^3 = \hat{0}$ egyenletnek.