

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**II. FELADAT (30p)**

1. Tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixokat az  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  halmazban.

5p a) Igazold, hogy  $A = B + I_3$ .

5p b) Bizonyítsd be, hogy az  $A$  mátrix invertálható, és határozd meg az  $A^{-1}$  mátrixot.

5p c) Határozd meg az  $a$  valós számot úgy, hogy  $\det X(a) = (2a - 1)^3$ , ahol  $X(a) = I_3 + aA$ .

2. A valós számok  $\mathbb{R}$  halmazán értelmezzük az  $x * y = xy - x - y + 2$  műveletet.

5p a) Igazold, hogy  $x * y = (x - 1)(y - 1) + 1$ , bármely  $x, y \in \mathbb{R}$ .

5p b) Igazold, hogy a "\*" művelet asszociatív.

5p c) Számítsd ki  $\frac{\sqrt{1}}{2} * \frac{\sqrt{2}}{2} * \dots * \frac{\sqrt{2008}}{2}$ .