

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**II. FELADAT (30p)**

1. Az  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  halmazban adottak az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  és  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok, valamint a

$G = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$  részhalmaz.

**5p** a) Számítsd ki  $\det A$ .

**5p** b) Igazold, hogy  $A^2X = XA^2$ , bármely  $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , ahol  $A^2 = A \cdot A$ .

**5p** c) Igazold, hogy ha  $a, b \in \mathbb{R}$ , akkor az  $aI_3 + bA \in G$ .

2. Adott az  $f = (1 + X + X^2)^{1004}$  polinom, amelynek algebrai alakja  $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{2008}X^{2008}$ .

**5p** a) Számítsd ki  $f(-1)$ .

**5p** b) Igazold, hogy  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2008}$  páratlan egész szám.

**5p** c) Számítsd ki az  $f$  polinomnak az  $X^2 - 1$  polinommal való osztási maradékát.