

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

II. FELADAT (30p)

1. Az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban adottak az $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $X(a) = I_2 + aA$ mátrixok, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy $A^2 = 8A$.

5p b) Számítsd ki $\det X(a)$.

5p c) Igazold, hogy $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 8ab)$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Adott az $f = (1 + X + X^3)^{669} \in \mathbb{Z}[X]$ polinom, amelynek algebrai alakja $f = a_{2007}X^{2007} + \dots + a_1X + a_0$.

5p a) Számítsd ki $f(1) + f(-1)$.

5p b) Igazold, hogy az $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2007}$ összeg egy 3-mal osztható szám.

5p c) Számítsd ki az f polinomnak $X^2 - 1$ polinommal való osztási maradékát.