

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ függvény.

- 5p** a) Igazoljátok, hogy $2xf'(x) + (x^2 + 1)f''(x) = 1$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- 5p** b) Bizonyítsátok be, hogy az $A\left(n, \frac{n}{n^2 + 1}\right), n \in \mathbb{R}$ pont $O(0,0)$ szerinti szimmetrikusa az f függvény grafikus képén van.
- 5p** c) Tanulmányozzátok az f' függvény előjelét.
- 5p** d) Bizonyítsátok be, hogy bármely $x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], x < y$ esetén teljesül az $f(x) < f(y)$ egyenlőtlenség.
- 5p** e) Határozzátok meg az f függvény szélsőértékeit.
- 5p** f) Határozzátok meg az $M = \{f(x) / x \in \mathbb{R}\} \cap \mathbb{Z}$ halmazt.