

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - ax}{x^2 + a}$, $a \in (0, +\infty)$ függvény.

- 5p** a) Bizonyítsátok be, hogy az $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - ax \leq 0\}$ halmaz korlátos.
- 5p** b) Ha $a = 1$, határozzátok meg a $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x \cdot [f(x) - 1]$ függvény aszimptotáit.
- 5p** c) Számítsátok ki az $l = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ határértéket.
- 5p** d) Bizonyítsátok be, hogy az $f'(0)$ értéke független az a paramétertől.
- 5p** e) Az $A(-a^2, 1)$ pont az f függvény grafikus képén van. Írjátok fel az f függvény grafikus képéhez az $A(-a^2, 1)$ pontban húzott érintő egyenletét.
- 5p** f) Bizonyítsátok be, hogy tetszőleges $a \in (0, +\infty)$ esetén a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x^2 + a) \cdot e^x \cdot f(x)$ függvénynek vannak szélsőérték-pontjai.