Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x^2+ax, & x\le 1 \\ b+\ln x, & x>1 \end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$ függvény.

5p **a)** Ha $b=-2$ határozzátok meg az f függvény előjelét az $(1,+\infty)$ intervallumon.

5p **b)** Mutassátok ki, hogy az f függvény akkor és csak akkor folytonos az $x=1$ pontban, ha $b-a=1$.

5p **c)** Határozzátok meg az a és b értékét úgy, hogy $f(e)=1$ és $f'(0)=1$ legyen.

5p **d)** Határozzátok meg a $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-1}$ függvény grafikus képének azon aszimptotáit, amelyek tartalmazzák az $A(1,2)$ pontot.

5p **e)** Tudva, hogy az f függvény deriválható az $\mathbb{R}$-en , tanulmányozzátok a függvény monotonitását a $(-\infty,1)$ intervallumon.

5p **f)** Számítsátok ki az $S=f'(e)+f'(e^2)+f'(e^3)+\dots+f'(e^{2009})$ összeget.

Rezolvare

a) Funcția este $f(x) = -2 + \ln x,\ x > 1$. Ecuația $-2 + \ln x = 0$ are soluția $x = e^2$. Pentru $1 < x < e^2$ valorile funcției sunt negative, iar pentru $x > e^2$ valorile funcției sunt pozitive.

b) Limitele laterale sunt $f(1-0) = 1 + a$, $f(1+0) = b$. Se obține $b = 1 + a$.

c) Se obține $f(e) = b + \ln e = b + 1$ şi $f'(0) = a$. Se obțin valorile $a = 1$, $b = 0$.

d) Se obține $g(x) = \dfrac{x^2 + ax}{x - 1}$. Asimptota oblică este $y = x + a + 1$. Punctul dat aparține asimptotei dacă $a = 0$.

e) Condiția de derivabilitate în 1 conduce la $a + 2 = 1$, deci $a = -1$. Funcția este $f(x) = x^2 - x,\ x < 1$. Pe intervalul $(-\infty, \frac{1}{2})$ funcția este descrescătoare, iar pe $(\frac{1}{2}, 1)$ funcția este crescătoare.

f) Numerele $e, e^2, ..., e^{2008}$ sunt mai mari decât 1. Rezultă că $S = e^{-1} + e^{-2} + e^{-3} + ... + e^{-2008}$ care este suma unei progresii geometrice de rație e^{-1}. Se obține că $S = \dfrac{1}{e-1} \cdot \left(1 - \dfrac{1}{e^{2008}}\right)$

Barem de evaluare la disciplina matematică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL II

Nr. item	Soluție, rezolvare	Punctaj
a.	Funcția este $f(x)=-2+\ln x,\ x>1$.	**1p**
	Ecuația $-2+\ln x=0$ are soluția $x=e^2$.	**2p**
	Pentru $1<x<e^2$ valorile funcției sunt negative, Pentru $x>e^2$ valorile funcției sunt pozitive.	**2p**
b.	Definiția continuității sau folosirea acesteia în rezolvare	**1p**
	Limitele laterale sunt $f(1-0)=1+a$, $f(1+0)=b$.	**2p**
	Se obține $b=1+a$.	**2p**
c.	Se obține $f(e)=b+\ln e=b+1$	**1p**
	Se obține $f'(0)=a$.	**2p**
	Rezultă că $a=1$, $b=0$.	**2p**
d.	Se obține $g(x)=\dfrac{x^2+ax}{x-1}$.	**1p**
	Asimptota oblică este $y=x+a+1$.	**2p**
	Punctul dat aparține asimptotei dacă $a=0$.	**2p**
e.	Condiția de derivabilitate în 1 conduce la $a+2=1$, deci $a=-1$. Funcția este $f(x)=x^2-x,\ x<1$.	**1p**
	Funcția este derivabilă pentru $x<1$ şi $f'(x)=2x-1$	**2p**
	Pe intervalul $(-\infty,\frac{1}{2})$ funcția este descrescătoare, iar pe intervalul $(\frac{1}{2},1)$ funcția este crescătoare.	**2p**
f.	Numerele $e,e^2,...,e^{2008}$ sunt mai mari decât 1	**1p**
	Rezultă că $S=e^{-1}+e^{-2}+e^{-3}+...+e^{-2008}$ care este suma unei progresii geometrice de rație e^{-1}.	**2p**
	Se obține că $S=\dfrac{1}{e-1}\cdot\left(1-\dfrac{1}{e^{2008}}\right)$	**2p**
Punctaj total		**30p**