

III. FELADAT (30p)

- 5p** a) Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ függvény. Határozzátok meg az f függvény egy olyan $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, mely grafikus képe tartalmazza az $M(1,1)$ pontot.
- 5p** b) Mutassátok ki, hogy $1 - x \leq \frac{1}{1+x} \leq 1 - x + x^2$, bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén.
- 5p** c) Határozzátok meg az $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$ függvény grafikus képe és az Ox tengely által határolt síkrész területét.
- 5p** d) Számítsátok ki az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát.
- 5p** e) Felhasználva esetleg a **b)** pontban lévő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \leq \frac{5}{6}$.
- 5p** f) Számítsátok ki az $\int_{-1}^1 (x^2 + x|x|) dx$.