

III. FELADAT (30p)

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{2x}$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén.
- 5p** b) Számítsátok ki: $\int_0^1 (3x + 2^x) dx$.
- 5p** c) Számítsátok ki az $f: [4, 9] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény grafikus képének az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát.
- 5p** d) Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény. Határozzátok meg az a, b valós számokat úgy, hogy az $F_1, F_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$, $F_2(x) = x^3 + (a-1)x^2 + bx + 3$ függvények az f függvény primitívjei legyenek.
- 5p** e) Felhasználva esetleg az a) pontban lévő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy $\int_1^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{2} \ln 2$.
- 5p** f) Számítsátok ki $\int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx$.