

**III. FELADAT (30p)**

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy  $x + \frac{1}{x+1} \geq 1$ , bármely  $x \in [0, +\infty)$  esetén.
- 5p** b) Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \frac{4x+3}{3}$  függvény. Számítsátok ki  $\int f(x) dx$ .
- 5p** c) Számítsátok ki az  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 - 2x$  függvény grafikus képének az  $Ox$  tengely körüli forgatásából származó test térfogatát.
- 5p** d) Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x} + x - 2$  függvény. Mutassátok ki, hogy az  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \int_1^x f(t) dt$  függvény, bármely  $x \in (0, +\infty)$  esetén, az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye.
- 5p** e) Felhasználva esetleg az a) pontban levő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy  $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \geq \frac{1}{2}$ .
- 5p** f) Számítsátok ki  $\int_1^3 \left| x - \frac{4}{x} \right| dx$ .