

III. FELADAT (30p)

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $\frac{x^2}{x^3+1} \leq \frac{x^3+1}{4x}$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén.
- 5p** b) Határozzátok meg az n természetes számot úgy, hogy $1 + \int_0^n 2x dx = \int_0^1 2n dx$.
- 5p** c) Határozzátok meg az $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 1$ függvény grafikus képe és az Ox tengely által határolt síkrész területét.
- 5p** d) Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x}$ függvény. Határozzátok meg az f függvény egy olyan $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $F'(1) + F(1) = \frac{5}{2}$.
- 5p** e) Felhasználva esetleg az a) pontban lévő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy $\int_1^e \frac{x^2}{x^3+1} dx \leq \frac{e^3+2}{12}$.
- 5p** f) Számítsátok ki $\int_{-1}^2 (x + 2|x|)e^x dx$.