

III. FELADAT (30p)

- 5p** a) Mutassátok ki, hogy $x + \frac{1}{x+3} \geq -1$, bármely $x \in [-2, +\infty)$ esetén.
- 5p** b) Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + \frac{x\sqrt{2}+1}{x}$ függvény. Számítsátok ki $\int f(x)dx$.
- 5p** c) Számítsátok ki az $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x|x|$ függvény grafikus képe az Ox tengely körüli forgatásából származó test térfogatát.
- 5p** d) Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - x + 1$ függvény. Mutassátok ki, hogy az $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,
 $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ függvény, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén, az f függvény egy primitív függvénye.
- 5p** e) Felhasználva esetleg az a) pontban lévő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+3} dx \geq \frac{1}{2}$.
- 5p** f) Számítsátok ki $\int_1^4 (x + \frac{1}{2\sqrt{x}}) \ln x dx$.