

**III. FELADAT (30p)**

- 5p a)** Mutassátok ki, hogy  $\frac{x}{x^2+4} \leq \frac{x^2+4}{16x}$  bármely  $x \in (0, +\infty)$  esetén.
- 5p b)** Határozzátok meg az  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$  függvény grafikus képe és az  $Ox$  tengely által határolt síkrész területét.
- 5p c)** Határozzátok meg az  $n$  természetes számot úgy, hogy  $\int_0^n (x-2)dx \leq \int_0^2 (nx-4)dx$ .
- 5p d)** Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$  függvény. Határozzátok meg az  $f$  függvény egy olyan  $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  primitívjét, amely grafikus képe tartalmazza az  $M(1,1)$  pontot.
- 5p e)** Felhasználva esetleg az **a)** pontban lévő egyenlőtlenséget, mutassátok ki, hogy  $\int_1^e \frac{x}{x^2+4} dx \leq \frac{e^2+7}{32}$ .
- 5p f)** Számítsátok ki  $\int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx$ .