

III. FELADAT (30p)

Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, adottak az $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (n+1) \cdot x^n + n \cdot x^{n+1}$ és $g_n(x) = n \cdot x^n + n+1$ függvények.

5p a. Számítsátok ki $\int_0^1 f_1(x) dx$.

5p b. Határozzátok meg a g_1 függvénynek azt a $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitívjét, amelyre $G(2) = 2$.

5p c. Határozzátok meg azt az $m \in \mathbb{Z}$ értéket, amelyre $\int_0^1 m \cdot g_1(x) dx = 5$

5p d. Számítsátok ki $\int_0^1 e^x \cdot g_1(x) dx$.

5p e. Számítsátok ki az f_1 és g_1 függvények grafikus képei által határolt síkrész területét.

5p f. Mutassátok ki, hogy az f_1 és g_1 függvények bármelyik F illetve G primitívje esetén igaz az

$$F(1) + G(2) < G(3) + F(4) \text{ egyenlőtlenség.}$$