

III. FELADAT (30p)

Adottak az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^3$, $g(x) = 2x^2 - x^3 - 1$ függvények.

5p a. Számítsátok ki: $\int f(x)dx$.

5p b. Számítsátok ki: $\int_0^1 g(x)dx$.

5p c. Mutassátok ki, hogy az f függvény bármely $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitívje esetén, igaz az $F(\sqrt{3}) > F(\sqrt{2})$. egyenlőtlenség.

5p d. Számítsátok ki $\int \frac{f(x)}{x^2} dx$, ha $x \in (1, \infty)$.

5p e. Mutassátok ki, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén, igaz az $\int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} g(x)dx$ egyenlőtlenség.

f. Adjatok egy példát, indokolva a választást, egy olyan nem állandó és f függvénytől különböző

5p $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre, amelyre $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 h(x)dx$.