

**III. FELADAT (30p)**

Bármely  $m, n \in \mathbb{N}^*$  esetén, jelölje  $I_n = \int_0^1 x^n dx$ ,  $J_n = \int_0^n x dx$ ,  $K_{m,n} = \int_0^m x^n \cdot e^x dx$ .

- 5p** a. Mutassátok ki, hogy  $(I_1 + J_1) \in \mathbb{Z}$ .
- 5p** b. Határozzátok meg azt az  $a$  egész számot, amelyre  $a \cdot I_2 = J_2$ .
- 5p** c. Mutassátok ki, hogy bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén, igazak az  $I_{n+1} \leq I_n \leq J_n$  egyenlőtlenségek.
- 5p** d. Határozzátok meg  $n \in \mathbb{N}^*$  értékét, amelyre  $\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \dots + \frac{1}{I_n} = 14$ .
- 5p** e. Határozzátok meg azt a legnagyobb nullától különböző  $n$  természetes számot, amelyre  $\frac{J_1}{1} + \frac{J_2}{2} + \dots + \frac{J_n}{n} \leq 14$ .
- 5p** f. Mutassátok ki, hogy :  $K_{2,1} > K_{1,2}$ .