III. FELADAT (30p)

Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén adottak az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n(x) = e^x \cdot f_n(x)$ függvények.

5p **a.** Határozzátok meg azt az a egész számot, amelyre $a \cdot \int_1^2 f_1(x)dx = 5$.

5p **b.** Számítsátok ki: $\int_0^1 g_1(x)dx$.

5p **c.** Határozzátok meg azt az n természetes számot, amelyre $\int_0^1 \left[f_{n+1}(x) - f_n(x) \right] dx = \frac{1}{2009}$.

5p **d.** Mutassátok ki, hogy az f_2 függvény bármely $F_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ primitív függvénye szigorúan növekvő a valós számok halmazán.

5p **e.** Számítsátok ki: $\int_0^1 g_2(x)dx$.

5p **f.** Határozzátok meg azt a legnagyobb m természetes számot, amelyre $\int_0^m f_1(x)dx \le 4$.