III. FELADAT (30p)

Bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén adottak az $f_n, g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - 1$, $g_n(x) = x^n + 1$ függvények.

5p **a.** Határozzátok meg azt az a egész számot ,amelyre $3 \cdot \int_0^1 f_2(x)\,dx = a$.

5p **b.** Ha F_2 az f_2 függvénynek egy olyan primitívje, amelyre $F_2(1) = 1$, akkor számítsátok ki $F_2(0)$-t .

5p **c.** Határozzátok meg azt az m természetes számot, amelyre $\int_0^m \frac{f_2(x)}{x+1}\,dx = 4$.

5p **d.** Számítsátok ki, az f_2 és g_1 függvénynek grafikus képei által határolt síkrész területét.

5p **e.** Mutassátok ki, hogy nem létezik olyan $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 g_n(x)\,dx$.

5p **f.** Határozzátok meg azokat a nullától különböző m természetes számokat, amelyekre $\left(\int_0^1 f_m(x)\,dx + \int_0^1 g_m(x)\,dx\right) \in \mathbb{Z}$.