III. FELADAT (30p)

Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén jelölje $I_n = \int_0^1 x^n dx$, $J_n = \int_0^1 x^n \cdot e^x dx$.

5p **a.** Számítsátok ki $I_1 + J_0$

5p **b.** Mutassátok ki, hogy $J_1 \in \mathbb{Z}$

5p **c.** Mutassátok ki, hogy $I_{n+1} \le I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p **d.** Határozzátok meg az $n \in \mathbb{N}$ értékét, amelyre $I_{n+1} + I_n = \frac{7}{12}$.

5p **e.** Mutassátok ki, hogy $J_{2009} = e - 2009 \cdot J_{2008}$.

5p **f.** Adjatok egy példát, indokolva a választást , egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem állandó függvényre, amelyre $f(1) \neq 1$ és $\int_0^1 f(x)dx = I_1$.