III. FELADAT (30p)

Adottak az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$, $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ függvények.

5p **a.** Számítsátok ki $\int_1^e g(x)dx$.

5p **b.** Számítsátok ki $\int_0^1 \left(x^3+x\right)\cdot f(x)dx$.

5p **c.** Határozzátok meg azt az m természetes számot, amelyre $\int_1^m \sqrt{x}\cdot g(x)dx=2$.

5p **d.** Határozzátok meg azt az n , $(n\ge 2)$, természetes számot, amelyre

$$\int_1^2 g(x)dx+\int_2^3 g(x)dx+...+\int_{n-1}^n g(x)dx=\ln 2009 .$$

5p **e.** Mutassátok ki, hogy ha a G a g függvénynek egy olyan primitívje a $(0,\infty)$ intervallumon, amelyre a $G(1)=2$, akkor igaz az $\dfrac{1}{G(3)}+\dfrac{1}{G(5)}<\dfrac{1}{G(2)}+\dfrac{1}{G(4)}$ egyenlőtlenség.

5p **f.** Mutassátok ki, hogy $\int_1^e f(x)dx\le 1$.