III. FELADAT (30p)

Adottak az $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x+\frac{1}{x}$ és $g:[1,2]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$, $\forall x\in[1,2]$ függvények.

5p **a.** Számítsátok ki: $\int x\cdot f(x)dx$, ha $x\in(0,\infty)$.

5p **b.** Mutassátok ki, hogy létezik $n\in\mathbb{N}$, amelyre $\int_1^n f(x)dx=4+\ln 3$.

5p **c.** Adjatok egy példát,indokolva a választást, az f függvény egy olyan F primitívjére, amelyre $F(1)\in\mathbb{Z}$.

5p **d.** Számítsátok ki $\int_1^e f(x)\cdot\ln x dx$.

5p **e.** Számítsátok ki a g függvény szubgrafikonjának az Ox tengely körüli forgatásából keletkezett forgástest térfogatát.

5p **f.** Felhasználva esetleg a $t+\frac{1}{t}\geq 2$ egyenlőtlenséget, amely igaz bármilyen $t\in(0,\infty)$ esetén, bizonyítsátok be, hogy bármely $a>1$ esetén az f függvény grafikus képe, az Ox tengely és az $x=1$, $x=a$ egyenletű egyenesek által határolt síkrész területe nagyobb vagy egyenlő, mint $2(a-1)$.