

**III. FELADAT (30p)**

Adottak az  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + 1$ ,  $g(x) = 4 - x$  függvények.

**5p** a. Számítsátok ki  $\int_0^1 f(x) dx$  .

**5p** b. Keressétek meg a  $g$  függvénynek egy  $G$  primitívjét, amelyre  $G(1) \in \mathbb{Z}$  .

**5p** c. Mutassátok ki, hogy bármely  $m > 1$  esetén igaz az  $\int_0^m f(x) dx > \frac{11}{6}$  egyenlőtlenség.

**5p** d. Bizonyítsátok be, hogy az  $f$  függvény bármely  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  primitívje esetén igaz az  $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > F\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$  egyenlőtlenség.

**5p** e. Számítsátok ki az  $f$  és  $g$  függvények grafikus képei által határolt síkrész területét.

**5p** f. Adjatok egy példát , indokolva a választást , egy olyan nem állandó  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amelyre  $\int_0^1 [h(x) + x \cdot h'(x)] dx = 2$