

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x - x^2$ függvény.

- 5p** a. Keressétek meg az f függvénynek egy olyan $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ primitívjét, amelyre $F(1) = 1$
- 5p** b. Számítsátok ki $\int_{-1}^1 f(x) dx$.
- 5p** c. Mutassátok ki, hogy létezik $q \in (0,1)$ úgy, hogy $\int_5^6 \frac{x-4}{f(x)} dx = \ln q$.
- 5p** d. Határozzátok meg $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ értékét, amelyre $\int_5^n \frac{f(x)}{4-x} dx = 12$.
- 5p** e. Számítsátok ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 4$ és $x = 5$ egyenletű egyenesek által határolt síkrész területét.
- 5p** f. Bizonyítsátok be, hogy $\int_0^1 e^x \cdot f(x) dx \leq 3e$.