III. FELADAT (30p)

Adottak az

$f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$ és $h_{p,q}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $h_{p,q}(x)=p\cdot x+\dfrac{q}{\sqrt{x}}$, $p,q\in\mathbb{Q}$ függvények .

5p **a.** Határozzátok meg $p,q\in\mathbb{Q}$-t, amelyre az f a $h_{p,q}$ függvénynek egy primitívje lesz.

5p **b.** Mutassátok ki, hogy : $\int_1^2 f\left(x^2\right)dx<8$.

5p **c.** Mutassátok ki, hogy ha $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ az f függvény egy primitívje, akkor $F\left(\sqrt{2}\right)<F\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

5p **d.** Mutassátok ki, hogy bármely $m\in\mathbb{Z}$ esetén , létezik $p\in\mathbb{Q}$ úgy, hogy $\int_1^3 h_{p,0}(x)dx=m$.

5p **e.** Adjatok egy példát , indokolva a választást , egy nem állandó $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényre, amelyre $\int_{-1}^1 g(x)dx\in\mathbb{Z}$.

5p **f.** Mutassátok ki, hogy létezik $p,q\in\mathbb{Z}^*$ úgy, hogy : $\int_1^4 h_{p,0}(x)dx=\int_1^4 h_{0,q}(x)dx$.