

III. FELADAT (30p)

Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ függvény és az $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}^*$ integrálok.

- 5p** a) Határozzátok meg az a és b valós számokat, amelyek kielégítik az $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ egyenlőséget, bármilyen $x \in (0, +\infty)$ esetén.
- 5p** b) Számítsátok ki I_1 -et.
- 5p** c) Számítsátok ki $\int_1^2 \left(\frac{1}{x+1} + f(x) \right) dx$.
- 5p** d) Mutassátok ki, hogy az f függvény bármely F primitívjére igaz az $F(\sqrt[3]{3}) < F(\sqrt[3]{5})$ egyenlőtlenség.
- 5p** e) Mutassátok ki, hogy $I_n + nI_{n-1} = e$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.
- 5p** f) Bizonyítsátok be, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, az $I_n \leq \frac{e}{n+1}$ egyenlőtlenséget.