

III. FELADAT (30p)

Adottak az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ függvények.

5p a) Számítsátok ki $\int f^3(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Számítsátok ki $\int_1^2 f^3(x) g^3(x) dx$.

5p c) Mutassátok ki, hogy az f függvény bármely F primitívje esetén igaz az $F(2008) < F(2009)$ egyenlőtlenség.

5p d) Tudva, hogy $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, számítsátok ki $\int_1^2 (f(x) - g(x))^3 dx$.

5p e) Számítsátok ki $\int_1^2 g'(x) dx$.

5p f) Mutassátok ki, hogy $\int_1^2 (f^2(x) + g(x)) dx \geq 2$.