

III. FELADAT (30p)

Adottak az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ és $g(x) = \frac{1}{x}$ függvények.

5p a) Számítsátok ki $\int g(x) dx$, $x \in (0, \infty)$.

5p b) Mutassátok ki, hogy $\int_1^e f(x) dx = 1$.

5p c) Mutassátok ki, hogy $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{x \cdot y}$, bármely $x, y \geq 0$ esetén.

5p d) Számítsátok ki $\int_1^{2009} f(x) g(x) dx$.

5p e) Határozzátok meg az f függvénynek egy olyan F primitívjét, amelyre $F(1) = 2009$.

5p f) Felhasználva esetleg a c) pontban lévő egyenlőtlenséget, bizonyítsátok be, hogy $\int_1^e \ln \frac{x+1}{2} dx \geq \frac{1}{2}$.