

III. FELADAT (30p)

Adottak az $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ és $g(x) = e^{2009x}$ függvények.

5p a) Határozzátok meg az f függvény egy olyan F primitívjét, amelyre $F(0) = 0$.

5p b) Mutassátok ki, hogy $\int_0^{\ln 2} f(x) dx = 1$.

5p c) Igazoljátok az $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x}$ egyenlőtlenséget, bármely $x \geq 0$ esetén.

5p d) Számítsátok ki $\int_0^{\frac{1}{2009}} g'(x) dx$.

5p e) Számítsátok ki $\int_0^{\ln 2} x f(x) dx$.

5p f) Felhasználva esetleg a c) pontot, bizonyítsátok be, hogy $\int_1^{2009} \sqrt{e^{x+1}} dx \geq \int_1^{2009} e^{\sqrt{x}} dx$.